

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к новому изданию . . . . .	9
Предисловие . . . . .	10
Введение . . . . .	12
<b>Раздел I. Средние функции и обобщенные производные</b> . . . . .	<b>17</b>
Глава 1. Средние функции . . . . .	17
§ 1. Усредняющее ядро . . . . .	17
§ 2. Средние функции . . . . .	19
§ 3. Сходимость средних функций . . . . .	21
Упражнения . . . . .	24
Глава 2. Обобщенные производные . . . . .	25
§ 1. Понятие обобщенной производной . . . . .	25
§ 2. Простейшие свойства обобщенной производной . . . . .	31
§ 3. Предельные свойства обобщенных производных . . . . .	33
§ 4. Случай одной независимой переменной . . . . .	34
§ 5. Соболевские пространства и теоремы вложения . . . . .	36
Упражнения . . . . .	37
<b>Раздел II. Элементы вариационного исчисления</b> . . . . .	<b>39</b>
Глава 3. Основные понятия . . . . .	39
§ 1. Примеры на экстремум функционала . . . . .	39
§ 2. Постановка задачи вариационного исчисления . . . . .	41
§ 3. Вариация и градиент функционала . . . . .	44
§ 4. Уравнение Эйлера . . . . .	52
§ 5. Вторая вариация. Достаточное условие экстремума . . . . .	56
§ 6. Изопериметрическая задача . . . . .	57
§ 7. Минимизирующая последовательность . . . . .	63
Упражнения . . . . .	64
Глава 4. Функционалы, зависящие от числовых функций вещественных переменных . . . . .	66
§ 1. Простейшая задача вариационного исчисления . . . . .	66
§ 2. Исследование второй вариации . . . . .	69
§ 3. Случай многих независимых переменных . . . . .	72
§ 4. Функционалы, зависящие от производных высших порядков . . . . .	75
§ 5. Функционалы, зависящие от нескольких функций . . . . .	78
§ 6. Естественные краевые условия . . . . .	80

Глава 5	Минимум квадратичного функционала . . . . .	89
§ 1.	Понятие о квадратичном функционале . . . . .	89
§ 2.	Положительно определенные операторы . . . . .	91
§ 3.	Энергетическое пространство . . . . .	97
§ 4.	Задача о минимуме квадратичного функционала . . . . .	106
§ 5.	Обобщенное решение . . . . .	109
§ 6.	О сепарабельности энергетического пространства . . . . .	112
§ 7.	Расширение положительно определенного оператора . . . . .	115
§ 8.	Простейшая краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения . . . . .	120
§ 9.	Более общая задача о минимуме квадратичного функционала . . . . .	126
§ 10.	Случай только положительного оператора . . . . .	130
	Упражнения . . . . .	130
Глава 6.	Собственный спектр положительно определенного оператора . . . . .	132
§ 1.	Понятие о собственном спектре оператора . . . . .	132
§ 2.	Собственные числа и собственные элементы симметричного оператора . . . . .	134
§ 3.	Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора . . . . .	135
§ 4.	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре . . . . .	138
§ 5.	Теорема о наименьшем собственном числе . . . . .	141
§ 6.	Теорема о дискретности спектра . . . . .	144
§ 7.	Задача Штурма — Лиувилля . . . . .	148
§ 8.	Элементарные случаи . . . . .	154
§ 9.	Минимаксимальный принцип . . . . .	155
§ 10.	О росте собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля . . . . .	158
	Упражнения . . . . .	160
Раздел III	Элементы теории интегральных уравнений . . . . .	161
Глава 7.	Вполне непрерывные операторы . . . . .	161
§ 1.	Необходимые сведения из функционального анализа . . . . .	161
§ 2.	Оператор Фредгольма . . . . .	163
§ 3.	Интегральный оператор со слабой особенностью . . . . .	166
§ 4.	Операторы со слабой особенностью в пространстве непрерывных функций . . . . .	170
	Упражнения . . . . .	173
Глава 8.	Теория Фредгольма . . . . .	174
§ 1.	Уравнения с в. н. о. Интегральные уравнения . . . . .	174
§ 2.	Сведение к конечномерному уравнению. Доказательство первой и второй теорем Фредгольма . . . . .	177
§ 3.	Доказательство третьей теоремы Фредгольма . . . . .	180
§ 4.	Доказательство четвертой теоремы Фредгольма . . . . .	182
§ 5.	Альтернатива Фредгольма . . . . .	185
§ 6.	О непрерывности решений уравнения со слабой особенностью . . . . .	187

Раздел IV. Общие сведения об уравнениях в частных производных . . . . .	190
Глава 9. Уравнения и краевые задачи . . . . .	190
§ 1. Дифференциальное выражение и дифференциальное уравнение . . . . .	190
§ 2. Классификация уравнений второго порядка . . . . .	192
§ 3. Краевые условия и краевые задачи . . . . .	196
§ 4. Задача Коши . . . . .	200
§ 5. Проблемы существования, единственности и корректности для краевой задачи . . . . .	202
Глава 10. Характеристики. Канонический вид. Формулы Грина . . . . .	207
§ 1. Преобразование независимых переменных . . . . .	207
§ 2. Характеристики. Соотношение между данными Коши на характеристике . . . . .	209
§ 3. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду . . . . .	212
§ 4. Случай двух независимых переменных . . . . .	213
§ 5. Формально сопряженные дифференциальные выражения . . . . .	216
§ 6. Формулы Грина . . . . .	217
Раздел V. Уравнения эллиптического типа . . . . .	222
Глава 11. Уравнение Лапласа и гармонические функции . . . . .	222
§ 1. Основные понятия . . . . .	222
§ 2. Сингулярное решение уравнения Лапласа . . . . .	225
§ 3. Интегральное представление функций класса $C^{(2)}$ . . . . .	226
§ 4. Интегральное представление гармонической функции . . . . .	229
§ 5. Понятие о потенциалах . . . . .	231
§ 6. Свойства объемного потенциала . . . . .	234
§ 7. Теорема о среднем . . . . .	241
§ 8. Принцип максимума . . . . .	245
§ 9. О сходимости последовательностей гармонических функций . . . . .	247
§ 10. Распространение на уравнения с переменными коэффициентами . . . . .	251
Глава 12. Задачи Дирихле и Неймана . . . . .	259
§ 1. Постановка задач . . . . .	259
§ 2. Теоремы единственности для уравнения Лапласа . . . . .	261
§ 3. Решение задачи Дирихле для шара . . . . .	265
§ 4. Теорема Лиувилля . . . . .	272
§ 5. Задача Дирихле для внешности сферы . . . . .	273
§ 6. Производные гармонической функции на бесконечности . . . . .	274
§ 7. Теорема единственности для внешней задачи Неймана . . . . .	275
Глава 13. Элементарные решения задач Дирихле и Неймана . . . . .	278
§ 1. Задачи Дирихле и Неймана для круга . . . . .	278
§ 2. Задача Дирихле для кругового кольца . . . . .	283
§ 3. Применение конформного преобразования . . . . .	284

§ 4. Сферические функции и их свойства . . . . .	288
§ 5. Задачи Дирихле и Неймана, решаемые с помощью сферических функций . . . . .	291
Упражнения . . . . .	295
<b>Глава 14. Вариационный метод в задаче Дирихле. Другие положительно определенные задачи . . . . .</b>	<b>296</b>
§ 1. Неравенство Фридрихса . . . . .	296
§ 2. Оператор задачи Дирихле . . . . .	298
§ 3. Энергетическое пространство задачи Дирихле . . . . .	302
§ 4. Обобщенное решение задачи Дирихле . . . . .	306
§ 5. Задача Дирихле для однородного уравнения . . . . .	308
§ 6. О существовании вторых производных решения задачи Дирихле . . . . .	311
§ 7. Эллиптические уравнения высших порядков и системы уравнений . . . . .	313
§ 8. Задача Дирихле для бесконечной области . . . . .	317
Упражнения . . . . .	320
<b>Глава 15. Спектр задачи Дирихле . . . . .</b>	<b>321</b>
§ 1. Интегральное представление функции, равной нулю на границе конечной области . . . . .	321
§ 2. Спектр задачи Дирихле для конечной области . . . . .	323
§ 3. Элементарные случаи . . . . .	324
§ 4. Оценка роста собственных чисел . . . . .	328
<b>Глава 16. Задача Неймана . . . . .</b>	<b>333</b>
§ 1. Случай положительного $C(x)$ . . . . .	333
§ 2. Случай $C(x) \equiv 0$ . . . . .	335
§ 3. Интегральное представление С. Л. Соболева . . . . .	337
§ 4. Исследование оператора $\mathfrak{M}_0$ . . . . .	340
§ 5. Обобщенное решение задачи Неймана . . . . .	344
Упражнения . . . . .	346
<b>Глава 17. Несамосопряженные эллиптические уравнения . . . . .</b>	<b>347</b>
§ 1. Обобщенное решение . . . . .	347
§ 2. Теоремы Фредгольма . . . . .	349
<b>Глава 18. Метод потенциалов для однородного уравнения Лапласа . . . . .</b>	<b>353</b>
§ 1. Поверхности Ляпунова . . . . .	354
§ 2. Телесный угол . . . . .	359
§ 3. Потенциал двойного слоя и его прямое значение . . . . .	365
§ 4. Интеграл Гаусса . . . . .	367
§ 5. Предельные значения потенциала двойного слоя . . . . .	370
§ 6. Непрерывность потенциала простого слоя . . . . .	374
§ 7. Нормальная производная потенциала простого слоя . . . . .	377
§ 8. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям . . . . .	382
§ 9. Задачи Дирихле и Неймана в полупространстве . . . . .	384

§ 10. Исследование первой пары сопряженных уравнений . . .	386
§ 11. Исследование второй пары сопряженных уравнений . . .	388
§ 12. Решение внешней задачи Дирихле . . . . .	391
§ 13. Случай двух независимых переменных . . . . .	394
§ 14. Уравнения теории потенциала для круга . . . . .	400
<b>Глава 19. Задача о кривой производной . . . . .</b>	<b>403</b>
§ 1. Постановка задачи . . . . .	403
§ 2. Оператор Гильберта . . . . .	405
§ 3. Уравнения с оператором Гильберта . . . . .	410
§ 4. Число решений и индекс задачи о кривой производной на двумерной плоскости . . . . .	418
<b>Раздел VI. Нестационарные уравнения . . . . .</b>	<b>421</b>
<b>Глава 20. Уравнение теплопроводности . . . . .</b>	<b>422</b>
§ 1. Уравнение теплопроводности и его характеристики . . .	422
§ 2. Принцип максимума . . . . .	424
§ 3. Задача Коши и смешанная задача . . . . .	427
§ 4. Теоремы единственности . . . . .	429
§ 5. Абстрактные функции вещественной переменной . . . . .	431
§ 6. Обобщенное решение смешанной задачи . . . . .	432
<b>Глава 21. Волновое уравнение . . . . .</b>	<b>436</b>
§ 1. Понятие о волновом уравнении . . . . .	436
§ 2. Смешанная задача и ее обобщенное решение . . . . .	437
§ 3. Волновое уравнение с постоянными коэффициентами. Задача Коши. Характеристический конус . . . . .	441
§ 4. Теорема единственности для задачи Коши. Область зависимости . . . . .	442
§ 5. Явление распространения волн . . . . .	445
§ 6. Обобщенное решение задачи Коши . . . . .	447
<b>Глава 22. Метод Фурье . . . . .</b>	<b>451</b>
§ 1. Метод Фурье для уравнения теплопроводности . . . . .	451
§ 2. Обоснование метода . . . . .	453
§ 3. О существовании классического решения. Частный случай . . . . .	457
§ 4. Метод Фурье для волнового уравнения . . . . .	459
§ 5. Обоснование метода для однородного уравнения . . . . .	462
§ 6. Обоснование метода для однородных начальных условий	466
§ 7. Уравнение колебаний струны. Условия существования классического решения . . . . .	468
<b>Глава 23. Задача Коши для уравнения теплопроводности . .</b>	<b>472</b>
§ 1. Некоторые свойства преобразования Фурье . . . . .	472
§ 2. Вывод формулы Пуассона . . . . .	477
§ 3. Обоснование формулы Пуассона . . . . .	481
§ 4. Бесконечная скорость теплопередачи . . . . .	485

Глава 24. Задача Коши для волнового уравнения . . . . .	486
§ 1. Применение преобразования Фурье . . . . .	486
§ 2. Преобразование решения . . . . .	489
§ 3. Случай трехмерного пространства . . . . .	493
§ 4. Обоснование формулы Кирхгофа . . . . .	495
§ 5. Задний фронт волны . . . . .	498
§ 6. Случай $m = 2$ (уравнение колебаний мембраны) . . . . .	500
§ 7. Уравнение колебаний струны . . . . .	501
§ 8. Волновое уравнение с переменными коэффициентами . . . . .	503
Раздел VII. Корректные и некорректные задачи . . . . .	507
Глава 25. О корректности задач математической физики . . . . .	507
§ 1. Основная теорема . . . . .	507
§ 2. Положительно определенные задачи . . . . .	509
§ 3. Задача Дирихле для однородного уравнения Лапласа . . . . .	510
§ 4. Внешняя задача Неймана . . . . .	511
§ 5. Внутренняя задача Неймана . . . . .	514
§ 6. Задачи теплопроводности . . . . .	517
§ 7. Задачи для волнового уравнения . . . . .	519
§ 8. О некорректности задач математической физики . . . . .	521
Добавления . . . . .	524
Добавление 1. Эллиптические системы . . . . .	524
Добавление 2. О задаче Коши для гиперболических уравнений. <i>В. М. Бабич</i> . . . . .	532
Добавление 3. Некоторые вопросы теории общих дифференциальных операторов. <i>В. Г. Мазья</i> . . . . .	545
Добавление 4. Нелинейные эллиптические уравнения второго порядка. <i>И. Я. Бакельман</i> . . . . .	555
Литература . . . . .	569
Предметный указатель . . . . .	574